Die Gleichung: $N_n = 2^q \left\{ n^2 p - n(u+v) \sum_1^p \iota + uv \sum_1^p \iota^2 \right\} \ldots . I$

welche die Höchstzahl der Schlüsselzüge, die Summe der Operationsmöglichkeiten nach unserer Schreibweise, angibt, läßt auch eine andere Auffassung zu.

Angeregt durch eine sehr interessante Untersuchung von K.Schulz, der Zusammenhänge wie die folgenden zuerst für einige schachgerechte spezielle Fälle entwickelte, konnte nämlich unter anderem nachgewiesen werden, daß je nachdem , ob ι auf = 1 beschränkt bleibt (Kurzschrittler) oder $\iota = 1,2,..p$ $p = \frac{n-n(\mathrm{mod}\ u)}{u}$ (Langschrittler) wird, N_n , [die Summe der Operationsmöglichkeiten der Operation $A_{u\iota,v\iota}$ bei n^2 Wertepaaren (ab), also die Höchstzahl der Schlüsselzüge auf dem Brette mit der Seitenlänge n], bei geradem n, sich als das Glied y_m einer mit N_2 beginnenden Reihe $y_0 = N_2$, $y_1 = N_4$, $y_2 = N_6$ $y_3 = N_8 \ldots\ldots\ldots y_m = N_n$ zweiter oder dritter Ordnung darstellen lassen läßt, mit anderen Worten

II.) $N_n = y_0 + \binom{m}{1}\Delta y_0 + \binom{m}{2}\Delta^2 y_0 + \binom{m}{3}\Delta^3 y_0$ für $\iota = 1,2,\ldots p$, wo:

III.)

$$y_0 = N_2 = 2^q \left\{ \frac{1}{u}(8-4r) - \frac{u+v}{2u^2}\left[2u(2-r)-2r(4-r)+8\right] + \frac{uv}{6u^3}\left[u^2(2-r) + 3u(4-4r+r^2) - 2r(12-6r+r^2) + 16\right]\right\}$$

$$\Delta y_0 = 2^q \left\{ \frac{1}{u}(56-12r) - \frac{u+v}{2u^2}\left[2u(6-r)-2r(12-r)+56\right] + \frac{uv}{6u^3}\left[(2u^2+12u(3-r)-12r(6-r)+112\right]\right\}$$

$$\Delta^2 y_0 = 2^q \left\{ \frac{1}{u}(96-8r) - \frac{u+v}{2u^2}(8u-16r+96) + \frac{uv}{6u^3}\cdot(24u-48r+102)\right\}$$

$$\Delta^3 y_0 = 2^q \cdot 8\left[\frac{6}{u} - 3\cdot\frac{u+v}{u^2} + 2\frac{uv}{u^3}\right] = 2^q \cdot \frac{8}{u}\left(3 - \frac{v}{u}\right)$$

$$n = \frac{n}{2} - 1, \quad u > v, \quad r = n(\mathrm{mod}\ u)$$

und

$N_n = y_0 + \binom{m}{1}\Delta y_0 + \binom{m}{2}\Delta^2 y_0$ für $\iota = 1$, wo

IV.
$$y_0 = N_2 = 2^q\left\{4 - 2(u+v) + uv\right\}$$
$$\Delta y_0 = 2^q\left[12 - 2(u+v)\right] \qquad \Delta^2 y_0 = 2^q \cdot 8 \qquad m = \frac{n}{2} - 1$$

Ähnliche Ausdrücke lassen sich entwickeln, wenn man N_n als das Glied y_m einer mit $y_0 = N_1$ beginnenden Reihe $N_1, N_2, N_3 \ldots$ (also n beliebig ganze Zahl) oder als das Glied y_m einer mit y_0 beginnenden Reihe N_1, N_3, N_5 (also ungeraden n) darstellt.

Die Bedeutung aller dieser Ausdrücke liegt naturgemäß nicht auf dem Gebiete der praktischen Berechnung von N. Sie gestatten vielmehr nach einer anderen Richtung wertvolle zusätzliche Einblicke in die Struktur der hier behandelten Probleme.

Beschränkt man nämlich in weiterer logischer Verfolgung des dualen Prinzips im Sechach die Betrachtung nur auf gerades n, hält man also nur den eingangs für gerades n entwickelten Ausdruck fest, so wird für Langschrittler---- ($\iota = 1,2,\ldots p$) N_n das allgemeine Glied y_m einer Reihe dritter Ordnung, wo m zur Charakterisierung ihres Aufbaues bis zur dritten Differenzenreihe, also bis zur Fixierung des $\Delta^3 y_0$ = konstant vorgeschritten werden muß.

Da, beginnend mit N_2, hiezu 4 Reihenglieder zu entwickeln sind, ist die Reihe und damit das N_n mit der Durchforschung von N_2, N_4, N_6, N_8 hinreichend charakterisiert.

Die Schlüsselstellung des Normalbrettes n = 8 bei Festhaltung des dualen Prinzipes erfährt dadurch eine ganz besondere Vertiefung.

Da bereits für das Zurechtbestehen der hier geforderten Reihe dritter Ordnung neben der bereits ins Auge gefaßten Konstanz von $\Delta^3 y_0$ auch dessen Ganzzahligkeit notwendig ist, Letzteres aber, wie aus

$$V. \quad \Delta^3 y_0 = \frac{2^{q+3}}{u}\left(3 - \frac{u}{v}\right), \quad u > v \text{ in } A_{v\iota, u\iota}, \quad \iota = 1,2,\ldots p$$

ersichtlich ist, von den Bewegungsgrößen u und v in $A_{v,u}$ abhängig sind, folgt zwingend, daß nur bei passender Wahl dieser vektoriellen Größen Ganzzahligkeit von y_0, bei gleichzeitiger Beobachtung von $N_2 = y_0 \neq 0$, gegeben ist und die obige Deutung ihren Sinn behält.

Die hier gewonnenen Ergebnisse lassen sich noch weiter verallgemeinern und vertiefen, doch würde dies den Raum der Arbeit überschreiten. Soviel läßt sich immerhin auf Grund des bisher Gesagten erkennen, daß bedeutende, strukturell bedingte Wechselwirkungen zwischen der Bewegungscharakteristik (den Kraftlinien) einer Figur und dem ihr zugewiesenen Raum bestehen.

Es läßt sich also aus dem Ausdruck V mit Bestimmtheit voraussagen, daß bei Festhalten am dualen Prinzip neben den orthodoxen Langschrittlern, deren u,v sämtliche der Ganzzahligkeit von $\Delta^3 y_0$ genügen, und den meisten Märchenfiguren, nur eine ganz beschränkte Anzahl ausgezeichneter

Figuren diese Ganzzahligkeit und $N_2 \geq 0$ erfüllt und damit in einem gewissen ~~Sinne~~ heute noch nicht ganz ausschöpfbaren Sinne dem Normalbrett irgendwie strukturell angepaßt erscheinen wird, während für Kurzschrittler ($l = 1$) laut IV gänzliche Unabhängigkeit von $\Delta^1 y_0$ von den Bewegungsgrößen besteht. Mit anderen Worten, erst bei Hinzutreten des skalaren zum vektoriellen Moment eines bestimmten Bewegungsgesetzes, das heißt erst bei Lösung der den Kurzschrittlern aufgelegten Fesseln und seiner Befreiung zum Langschrittler treten bestimmte Wechselwirkungen zwischen Raum und Kraft auf und ist die Struktur des Raumes in gewissem Sinne und mit gewissen, hier nicht näher zu erörternden Beschränkungen mit bestimmend für die innerhalb dieses Raumes wirksamen Kräfte, sollen die geforderten Grundsätze, vor allem das der Dualität, erhalten bleiben.

In diesem Zusammenhange bietet eine systematische Durchforschung der Kombinationsmöglichkeiten aufgehobener und bestehender Dualitäten an Hand unserer Notation größtes Interesse.

Wir unterscheiden folgende Fälle:

Dualität I, erzeugt durch Vertauschbarkeit von i und k - aufgehoben wurde sie:

a) durch Identität beider Indices i = k
b) bei Nichtidentität, wenn Nichtkommutativität besonders gefordert wurde.

Dualität II, erzeugt durch doppelte Vorzeichenzuordnung sowohl an i als auch an k.

aufgehoben wurde sie:

a) wenn der eine der beiden Indices gleich Null wird,
b) wenn in besonderen Fällen bei einen oder bei beiden Indices nur 1 Zeichen zulässig ist.

Dualität III, erzeugt durch Gleichsinnigkeit und Ungleichsinnigkeit der Zuordnung der beiden Vorzeichen an i und k.

aufgehoben wurde die:

a) wenn nur e i n e Zuordnung möglich ist.
b) wenn nur eine Zuordnung ~~möglich~~ gefordert wurde.

Die jeweiligen Fälle a und b sind isomorph: a bedeutet Trivialwerden infolge Annahme besonderer Werte, b trägt definitorischen Charakter.

Die Anzahl der Kombinationsmöglichkeiten berechnet sich aus der Überlegung, daß die Anzahl der Freiheitsgrade, das ist die Anzahl der bestehend bleibenden Dualitäten $q = 3,2,1,0$ werden kann, ~~zwischen~~ zu $\binom{3}{3}+\binom{3}{2}+\binom{3}{1}+\binom{3}{0} = 8 = 2^3$,

eine Zahl die wiederum ebenso auf die überragende Stellung des Dualitätsprinzipes im Schach hinweist, wie die Anzahl

der Aufhebungsmöglichkeiten jeder Dualität.

Wir erhalten so etwa folgende Übersicht, die keineswegs Anspruch auf Vollständigkeit erhebt.

Stufen der Komplexität	Grade der Komplexität	DUALITÄT erzeugt durch: I. Kommutativität	II. Doppelte Vorzeichen	III. Gleichsinnigkeit und Ungleichsinnigkeit		Beispiele und Notationen:
		existenzfähig	nicht existf.fähig infolge	existenzfähig	nicht existf. infolge	
3	I II III	/	/	/		A_{ik}
2	I II	/	/		a	
		/	/		b	$A_{\pm i \pm K} \circ {}^{-}_{+} i \pm K$
	I III	/		a	/	A_{oi}
		/		b	/	$i-K \circ {}^{-}_{+} iK$
	II III		a	/	/	A_{ii}
			b	/	/	$A_{\overline{iK}}$
1	I	/		a		A_{o+i}
		/		b	a	$+i-K \circ A_{+i-i}$
			a	/	b	$\pm i \pm i$
	II		b	/	b	$\overline{\pm i \pm K}$
	III		b	a	/	$A_{\overline{oi}}$
			b	b	/	$\overline{i-i} \circ -i\overline{+K}$
0			a	b		$+i+i$
			b	a		$A_{\overline{o+i}}$
			b	b		$+\overline{i-i} \circ -i\overline{+K}$

Berücksichtigt man weiters die Fülle der A_{ik} - Operationen, die sich durch Wahl verschiedener i und k ergeben, indem nämlich $i = \varphi(\iota)$, $k = \psi(\iota)$ gesetzt werden kann, wo ferner ι auf $\iota = 1$ beschränkt oder die laufenden Werte $\iota = 1,2,....p$ (kontinuierliche Langschrittler) oder die Werte $\iota = m, m+d, m+2d.....p$ (diskontinuierliche Langschrittler annehmen kann, zieht man ferner die Zusammensetzungsmöglichkeit im Sinne von $A_{\iota k} + A_{\iota' k'} = A_{\iota k, \iota' k'}$ in Betracht, die insbesonders bei Operationen mit beschränktem Freiheitsgrad zwecks Erweiterung der Operationsmöglichkeiten von Bedeutung sind und erweitert man die Möglichkeiten durch Forderung von Kongruenz beziehungsweise Nichtkongruenz von Zug- und Schlagrichtung bei diesen zusammgesetzten Operationen, so erhält man einen schwachen Schimmer der ungeheueren Möglichkeiten.

Es wird so auch klar, daß die orthodoxen und im großen und ganzen auch die Märchenfiguren den Rahmen einiger weniger speziellen Fälle dieser Möglichkeiten nicht überschreiten.

Als Abschluß nochmals kurze Zusammenfassung unserer Systematik:

A_{ik}-Operation 1.Ordnung: Allgemeinste A_{ik}-Form, wo i,k = 0,1,2,....n-1 alle Werte durchlaufen (Panfigur)

Operation 2.Ordnung: $i = \varphi(\iota)$, $k = \psi(\iota)$ (allgemeinste Märchenform) i und k nehmen nur ganz bestimmte Werte an und werden in gesetzmäßigerweise durchlaufen, Lauf-Index ι koordiniert. Hiebei haben die Konstanten in den Funktionen und als für die betreffende Operation (Figur) kennzeichnende Bewegungsgrößen vektorielle Bedeutung, sind also ein Ausdruck für die Bewegungscharakteristik der betreffenden Figur. Der Laufindex ι, der selbst wieder eine Funktion von ν ($\nu = 0,1,2,..... \nu_p$) sein kann, ist hingegen skalarer Natur und ein Ausdruck für die Reichweite und den Rythmus der Bewegung.

Operation 3.Ordnung: $\varphi(\iota) = u.\iota$, $\psi(\iota) = v.\iota$ u,v ≥ 0 (ganze Zahlen)...allgemeinste Coursierform.

a) Einteilung im skalarem Sinne $\iota = m+\nu d$, $\nu = 1,2,.....\nu_p$

α) m,d $\neq 0$ diskontinuierliche Form } des langschrittigen
β) m = 0,d = 1 kontinuierliche Form } Coursiers, bei $\nu = 1,2,.....\nu_p$

γ) m=0,d=1,ν=1 Sauteurtyp, Kurzschrittler

b) Einteilung nach dem Dualitätsprinzip, siehe Tabelle Seite 13; unter anderem:

α) Kommutative Form, wo $A_{ik} = A_{ki}$ und
nichtkommutative Form, wo $A_{ik} \neq A_{ki}$

β) reversible Form, wo beide Indices i,k sowohl positive als auch negative Werte annehmen und
irreversible Form, wo die doppelte Vorzeichenzuordnung beschränkt oder gänzlich unzulässig ist.

c) Einteilung nach der Anzahl und Art der zugelassenen Teiloperationen

α) Einfache Formen, A_{ik}

β) zusammengesetzte Formen, A_{ik}, $A_{i'k'}$, $A_{i''k''}$,

γ) Kongruenz von Zug-und Schlagrichtung, A_{ik}, $A_{i'k'}$

δ) Nichtkongruenz von Zug-und Schlagrichtung A_{ik}, $A_{i'k'}$, das heißt 1.Teiloperation nur ziehend, 2.Teiloperation nur schlagend.

In der hier gegebenen, nur kurz umrissenen und nach verschiedensten Richtungen ausbaufähigen Systematik sollte der Versuch unternommen werden, eine Erweiterung der Dawson'schen Klassifikation nach strengerem Gesichtspunkt als dort behandelt zu geben, die in ihr enthaltene Notation, die auf den 3 im Dualitätsprinzip des Schachs begründeten, weiter oben erwähnten Freiheiten fußt, sollte weiters gewissermaßen nach gruppentheoretischen Gesichtspunkten die Struktur des Schachs beleuchten und es gestatten, in einfacher, von der Anschauung völlig unabhängigen Weise nicht nur die Frage nach der Höchstzahl der Schlüsselzüge, sondern auch verschiedene andere mit dem Schach zusammenhängende Fragen zu behandeln.

So wird unter anderem jede Erweiterung des bestehenden Figurenschatzes durch Schaffung neuer Märchenfiguren dem aus der Notation ohneweiters fließenden, im tiefsten Wesen des Schachs begründeten, dominierenden Dualitätsprinzip Rechnung tragen müssen, soll sich die neu geschaffene Figur organisch dem bereits bestehenden Figurenmaterial einordnen. Erwähnt sei hier nur kurz, daß uns erstmalig 1942 in der zitierten Arbeit aufgestellte Notation in Unkenntnis der Dawson'schen Arbeit, Schwalbe 1929, Seite 270,303,320 entstanden ist, die mir bruchstückweise erst durch die mir im Dezember 1944 zugesandte Fabel'sche Arbeit in Sphinx 1933, Nr.4 zugänglich wurde.

Der wesentlichste Fortschritt gegenüber der Dawson'schen Symbolik müßte einmal in der strukturell getreuen Ausformung der die einzelnen Typen kennzeichnenden mathematischen Größen und damit Vereinheitlichung der Schreibweise für Sauteur- und Coursiertyp erblickt werden.

In der Schreibweise $A_{v\iota,u\iota}$ treten neben den auch bei Dawson vorhandenen und dort mit x,y bezeichneten, für jede Figur charakterisierenden Bewegungsgrößen u,v der Laufindex ι auf, der nach einheitlichen Gesichtspunkten eine Notation aller in Frage kommenden Operationen (Figuren) gestattet. Für $\iota = 1$ haben wir nämlich Kurzschrittler im allgemeinen und Sauteurs im besonderen, für $\iota = 1,2,\ldots.p$ kontinuierliche Langschrittler im allgemeinen und Coursiers im besonderen.

Durch Wahl der unterschiedlichen Symbolik S(x,y) und C (x,y) wird es hingegen wenig durchsichtig, daß, mathematisch gesehen, der Sauteurtyp nur einen speziellen Fall des Coursiertyps darstellt. Die Auffassung der Zahlen x,y ist weiters nicht einheitlich, bedeuten diese Zahlen, mathematisch gesehen, in beiden Symbolen nicht dasselbe - im ersten Falle Koordinaten, im 2. Falle Richtungskoeffizienten. Demgegenüber stellen in unserer Notation die Komplexindices $v\iota$, $u\iota$ selbst wieder nur spezielle Fälle der algebraischen Funktion $\varphi(\iota)$, $\psi(\iota)$ dar und diese wieder nur den besonderen Fall der allgemeinen Indices i und k, wodurch der streng logische Aufbau des Systems deutlich hervortritt.

Ansätze zu diesem von uns verwendeten Index finden sich durch Einführung von $y = qx$ in C (x,y) allerdings auch bei Dr. Fabel und Martin Kuehl, doch dient diese Einführung dort lediglich der Berechnung der Höchstzahl der Schlüsselzüge N, unter Verzicht auf Interpretation dieses unserem ι entsprechenden x als wichtigem Bauelement der gesamten Klassifikation. Weiters fehlt der Dawson'schen Symbolik jene Verfeinerung der hier entwickelten Notation, die, wie weiter oben gezeigt, die Kombinationsmöglichkeiten der Freiheitsgrade des Dualitätsprinzipes erfaßt und damit die wichtigste Voraussetzung schafft für die Einführung der Begriffe " kommutative, nichtkommutative, reversible und irreversible Operationen "und so in fruchtbarer Weise richtungsgebend wird für die Schaffung interessanter neuer Märchenfiguren.

Es werden diese Begriffe zwar in den verschiedenen, diesbezüglichen Arbeiten zum Teil auch behandelt, doch fehlt die an eine einheitliche, nach logischen Grundsätzen aufgebaute und durchsichtige Notation geknüpfte Systematik.

Die Wahl einer entsprechenden Notation - oft nur ein glücklicher Griff - macht, wie die Entwicklung der Mathematik beispielsweise im Falle des dekadischen Systems und der Differenzialrechnung in geradezu klassischer Weise zeigt, die Behandlung weiter Bezirke der Mathematik erst in einfacher Weise zugänglich. Der passende Algorithmus (Colerus) wird zum Schlüssel für eine fast mechanische Abschnurrung rechnerischer Vorgänge und damit zur Lösung von Problemkomplexen, die sonst nur durch schwierigste Denkprozesse bewältigt werden können.

A N H A N G

Aus der allgemeinen Formel: $N = 2^{-q}\left\{n^2p - n(u+v)\sum_{\ell=1}^{\ell=p}\ell + uv\sum_{\ell=1}^{\ell=p}\ell^2\right\}$ lassen sich noch einige interessante Beziehungen ableiten.

Wird der Laufindex ℓ auf $\ell = 1$ beschränkt, so entfällt die Aufsummierung und wir haben ein N von der Form:

$$N = A_1 n^2 + B_1 n + C_1$$

Kann jedoch der Laufindex ℓ sämtliche Werte zwischen 1 und p durchlaufen, so erhält N, da in den Summenformeln n in der zweiten, bzw. dritten Potenz auftritt, die Form:

$$N = A_\ell n^3 + B_\ell n^2 + C_\ell n + D_\ell$$

Bezieht man das N eines beliebigen Steines X, bei dem ℓ auf $\ell = 1$ beschränkt bleibt, auf das N eines beliebigen Steines, bei dem ℓ ebenfalls auf $\ell = 1$ beschränkt bleibt, z.B. auf den König, bildet man also

$$\frac{N_X}{N_K} = \frac{A_1 n^2 + B_1 n + C_1}{A_1' n^2 + B_1' n + C_1'} = A + \frac{B}{n} + \frac{C}{n^2} + \dots ,$$

so ergibt sich, daß mit wachsendem n das Verhältnis der Gesamtzahl der Schlüsselzüge beider Steine einem bestimmten endlichen Grenzwert zustrebt, da

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_X}{N_K} \to A$$

Bezieht man anderseits das N eines beliebigen Steines Y, bei dem $\ell = 1,2,\dots p$ werden kann, auf den König, bildet man also:

$$\frac{N_Y}{N_K} = \frac{A_\ell n^3 + B_\ell n^2 + C_\ell n + D_\ell}{A_1' n^2 + B_1' n + C_1'} = A'n + B' + \frac{C'}{n} + \frac{D'}{n^2} + \dots$$

so geht daraus hervor, daß mit wachsendem n das Verhältnis über alle Grenzen wächst, da

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_Y}{N_K} \to \infty$$

Um in solchen Fällen einen endlichen Wert zu erhalten, muß man den fraglichen Stein Y auf einen bestimmten anderen mit wieder $\ell = 1,2,\dots p$ beziehen. Das heißt zusammengefaßt mit anderen Worten:

Das Verhältnis der Gesamtzahl der Schlüsselzüge zweier Kurzschrittler ($\ell = 1$) und dieser Gesamtzahl zweier Langschrittler ($\ell = 1,2,\dots p$) zueinander strebt mit wachsendem n (wachsender Brettgröße) einem bestimmten festen Grenzwert zu. Bezieht man jedoch die Anzahl der Schlüsselzüge eines Langschrittlers auf diejenige eines Kurzschrittlers, so hat dieses bei endlichem n zwar auch einen endlichen Wert, es wächst aber mit wachsender Brettgröße immer mehr, um bei unbegrenzt wachsendem n über alle Maßen zu wachsen.

Man kann diese Tatsache neben dem bereits oben erwähnten Kriterium ($\ell = 1$ oder $\ell = 1,2,\ldots p$) und der Tatsache, daß n in N zweidimensional bei Kurzschrittlern und dreidimensional bei Langschrittlern wird, geradezu als Kriterium für Kurz- und Langschrittigkeit ansehen.

Schulz hat in einer hübschen Arbeit gezeigt, wie die gesamte Anzahl der Schlüsselzüge ("Agilitätszahl") bei kleinen Brettgrößen um ein geringes kleiner oder größer oder gleich der des Königs ist, wie dann mit allmählich wachsendem n die verschiedenen Langschrittler je nach ihrer Agilität die Schlüsselzüge des Königs erreichen und überschreiten, und wie schließlich dann mit weiter wachsender Brettgröße eine allmähliche Differenzierung zwischen Kurz-und Langschrittler eintritt, indem erstere sich in einem festen endlichen Verhältnis zur Agilitätszahl des Königs setzen, während letztere sich von diesem immer mehr, auch hier wieder je nach Agilität distanzieren.

Wir können endlich als Brett mit der kritischen Seitenzahl n_k dasjenige bezeichnen, bei welchem die Gesamtzahl der Schlüsselzüge eines Langschrittlers oder Kurzschrittlers erstmalig die Schlüsselzahl des Königs erreicht und hiemit ein weiteres sehr anschauliches Charakteristikum gewinnen. Man erhält n_k durch Gleichsetzung von N_x mit N_K und Isolierung von n.

Hallein, den 6.Februar 1945