BRETT UND FIGUR IM BANNE DER DUALITÄT

VON
Dr.E.v.FABRIZI
HALLEIN
1945.

Dr. Fabel hat in der Zeitschrift Sphinx (1933,4) in einer sehr fesselnden Arbeit verschiedene Ausdrücke für die Berechnung der Höchstzahl der Schlüsselzüge abgeleitet. Es ist von Interesse zu verfolgen, auf welchem Wege unsere Notation (" Das Schachbrett als Zahlenfeld") zum gleichen Ziele führt.

Es sei, wie in der zitierten Arbeit +) (ab) ein Wertepaar, wo $a_\nu, b_\mu = 1,2,\ldots\ldots^{\nu,\mu}\ldots n$ und $a_\nu b_\mu \neq a_\mu b_\nu$, A_{ik} eine Operation, die ein beliebiges Wertepaar (ab) in das Wertepaar (a+i,b+k) transformiert, wo A_{ik} im allgemeinen dem Gesetz der Kommutativität gehorcht, also $A_{ik} = A_{ki}$, und wo $i,k \gtrless 0$, wobei allerdings i,k so gewählt werden müssen, daß im resultierenden Wertepaar (a+i,b+k) wieder nur die Zahlen zwischen 1 und n durchlaufen werden ~~müssen~~ können.

Unter Berücksichtigung der dort angewandten Notation schreiben wir daher A_{ik}, wenn sowohl i als auch k sowohl positive als auch negative ganzzahlige Werte annehmen können und $A_{ik} = A_{ki}$, ferner $A_{\overline{ik}}$, wenn $A_{ik} \neq A_{ki}$, endlich $A_{\pm ik}$, wenn bei i nur positive, hingegen bei k beide Zeichen, oder $A_{\pm i-k}$, wenn bei i nur positive, bei k nur negative Zeichen zulässig sind. Das Symbol, $A_{ik,i'k'}$ gestattet sowohl die Anwendung der Operation A_{ik} als auch die der Operation $A_{i'k'}$ auf das Zahlenpaar (ab) usw.

Aus der Charakteristik der so definierten ganz allgemeinen A_{ik} Operation folgen sofort folgende Dualitäten: ++)

Dualität I: Vertauschbarkeit von i und k; Sie verliert ihren Sinn bei Jdentität der beiden Indices oder nur dann bei deren Nichtidentität, wenn Nichtkommutativität besonders gefordert wird.

Dualität II: Verschiedene Vorzeichen sowohl von i als auch von k. Sie verliert ihren Sinn, wenn einer der beiden Indices gleich Null wird, oder wenn in besonderen Fällen bei einem oder beiden Indices nur ein Vorzeichen zulässig ist.

Dualität III: Gleichsinnigkeit, bzw. Ungleichsinnigkeit der Zuordnung bezüglich der Vorzeichen, Sie entfällt, wenn nur eine Zuordnung a) möglich oder b) zulässig ist, so daß höchstens 2^3 verschiedene Zuordnungsmöglichkeiten von i und k an a und b gegeben sind, und zwar im einzelnen:

a + i, b + k	und	a + k, b + i
a + i, b - k		a + k, b - i
a - i, b + k		a - k, b + i
a - i, b - k		a - k, b - i

+) Fabrizi, Das Schachbrett als Zahlenfeld 1943

++) Über die Kombinatorik der Freiheitsgrade (Anzahl der Dualitäten) siehe Seite

Da diese Paare nur Zahlen zwischen 1 und n enthalten dürfen, kommen für diese wie oben definierte allgemeine Operation A_{ik} nur die Zuordnungen von (n-i) Zahlen zu (n-k) Zahlen in Betracht, wobei zu berücksichtigen ist, daß (ab) ≠ (ba) ist, das heißt, es liefert jede der (n-i) Zahlen (n-k) Wertepaare und umgekehrt, mit anderen Worten, es gibt (n-i)(n-k) Zuordnungen für je ein bestimmtes i und k.

Für die Panfigur nun, die so charakterisiert, daß in A_{ik} die Indices sämtliche erlaubte Werte ohne irgendwelche regelnde Bindung zwischen i und k durchlaufen können (nur gleichzeitiges Nullwerden von i und k sei unzulässig, weil dies nicht als Zug im schachlichen Sinne gewertet werden kann), ist zu bilden:

$$\sum_{i=0,\,k=1}^{i+k=n-1}(n-i)(n-k) = \begin{aligned} &n(n-1)+n(n-2)+\ldots+n\left[n-(n-1)\right] \\ &+(n-1)(n-1)+(n-1)(n-2)+\ldots+(n-1)\left[n-(n-1)\right] \\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\left[n-(n-1)\right](n-1)+\left[n-(n-1)\right](n-2)+\ldots+\left[n-(n-1)\right]\left[n-(n-1)\right] \end{aligned}$$

In diesem Ausdruck stellt die erste Zeile die Summe der Operationsmöglichkeiten der Operation A_{oi} dar, da sie sämtliche Faktoren von Typ (n-0)(n-i) enthält.

Bei dieser Operation A_{oi} entfällt also Dualität II, da nicht beide Indices beide Vorzeichen annehmen können, es ist also der Entwicklung dieser ersten Zeile der Faktor 2^{3-1} voranzustellen.

In jeder der folgenden Zeilen erscheint ein Faktor vom Typ $(n-i)^2$, der auf eine Operation A_{ii} hinweist, welchen Faktoren aufsummiert, gleichfalls der Faktor 2^{3-1} voranzusetzen ist, da bei allen diesen Operationen Dualität I entfällt (wegen Identität von i und k, k = i = i).

Endlich erscheint jeder Faktor vom allgemeinen Typ (n-i)(n-k) in diesen restlichen Zeilen doppelt, sodaß zur Ermittlung des wahren Wertes halbiert werden muß, also ist der Faktor $2/2$ vorzusetzen, da bei allen diesen Operationen alle 3 Dualitäten existenzfähig sind.

Wir haben also ganz einheitlich für die gesamte Entwicklung den Faktor 4 erhalten.

$$N = 4 \cdot \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{n(n-1)}{2} = n^2(n^2-1)$$

Was offensichtlich stimmt, denn die wie oben definierte Panfigur kann von jedem der insgesamt n^2 Felder die restlichen (n^2-1) Felder bestreichen.

Um den bisher ganz allgemein behandelten Indices i,k spezielle Werte zu erteilen, schreiben wir

$$i = \varphi(\iota), \quad k = \psi(\iota)$$

wo $\varphi(\iota)$ und $\psi(\iota)$ ganzzahlige, algebraische Funktionen bedeuten, $\psi(\iota) > \varphi(\iota)$ sein soll und:

$\iota = m+d, m+2d, \ldots m+\nu d$ (diskontinuierliche Form)
oder im besonderen Falle
$m = 0, \quad d = 1$
$\iota = 1, 2, \ldots\ldots p,$ (kontinuierliche Form),

das heißt, es sollen i und k nicht alle beliebigen Werte formlos durchlaufen können, sondern sollen durch ein ganz bestimmtes, ordnendes Gesetz miteinander verknüpft sein. Damit soll unter den $n^2(n^2-1)$ Operationsmöglichkeiten der ganz allgemeinen A Operation eine bestimmte Auslese getroffen werden.

Wir müssen dann, analog oben, um die Gesamtzahl der Operationsmöglichkeiten von $A_{\varphi(\iota), \psi(\iota)}$ zu ermitteln, die Entwicklung von

$$\sum_{\iota=\iota_0}^{\iota=\max.p} [n-\varphi(\iota)][n-\psi(\iota)]$$

durchführen, wo p maximal so ~~entwickelt~~ gewählt werden muß, daß in Anbetracht von $\psi(\iota) > \varphi(\iota)$

$$\varphi(\iota) < \psi(p) < n < \psi(p+1)$$

Bei dieser Entwicklung sind sämtliche Glieder vom Typ $n(n-\iota_r)$, da der Operation A_{o,ι_r} zugeordnet, wegen der dort entfallenden Dualität II (also Anzahl der Freiheiten q = 2) mit 2^2, und ebenso sämtliche Glieder vom Typ $(n-\iota_s)^2 = (n-\iota_s)(n-\iota_s)$, da der Operation A_{ι_s,ι_s} zugeordnet, wegen der dort entfallenden Dualität I (infolge Identität $\iota_s = \iota_s$, also q = 2) ebenfalls mit 2^2, die restlichen Glieder vom Typ $(n-\iota_r)(n-\iota_s)$ jedoch wegen Bestehenbleibens aller 3 Dualitäten (q=3) mit 2^3 zu multiplizieren.

Ist die Operation nicht kommutativ ($A_{\varphi(\iota), \psi(\iota)}$) oder irreversibel, weil bei $\varphi(\iota)$ oder bei $\psi(\iota)$ oder bei beiden nur ein bestimmtes Vorzeichen zulässig ist, sind die entsprechenden resultierenden niedrigeren Freiheitsgrade q zu berücksichtigen, was bei der Wahl des Faktors 2^q, mit dem die Entwicklung--oder Teile dieser-- zu multiplizieren ist, zur Auswirkung kommt.

So läßt sich beispielsweise für die Summe der Operationsmöglichkeiten N der Operation $A_{\iota+s,\iota t}$ ($\iota = 0,1,2,\ldots.p$) die Entwicklung

$$N = 2^2 n(n-s) + 2^2 \left(n-\frac{st}{t-1}\right)^2 + 2^3 \{(n-1-s)(n-t) + (n-2-s)(n-2t)\ldots.(n-p-s)(n-pt)\}$$

angeben, wo in der letzten Reihe nur das Glied (n-x-s)(n-xt), wo $x = \frac{s}{t-1}$, fehlt; $p = \frac{n-n(\mathrm{mod}\ t)}{t}$

Hiemit ist das anzuwendende allgemeine Verfahren genügend beschrieben und wir können uns nun mehr innerhalb aller dieser Operationen $A_{\varphi(\iota),\psi(\iota)}$ wieder einer ganz speziellen Untergruppe von Operationen zuwenden, und zwar solchen, wo

$$\iota = \varphi(\iota) \cdot v\iota, \qquad \kappa = \psi(\iota) = u\iota, \qquad u > v$$

das sind also solche Operationen, bei denen i und k in ganz bestimmten ganzzahligen Verhältnis zueinander stehen und die den Dawson'schen "Sauteur" und"Coursiers" Typ beinhalten.

Wir sehen aus dieser Systematik, daß die Coursiersform- in den meisten Arbeiten anderer Autoren die allgemeinste Form- selbst nur eine Untergruppe dritter Ordnung der $A_{\iota,\kappa}$- Gruppe darstellt. Hier sind wir jedoch bei unserer Durchforschung von der noch allgemeineren Form erster Ordnung $A_{\iota,\kappa}$ ("Panfigur",i und k nehmen jeden beliebigen der überhaupt erlaubten Werte an) und zweiter Ordnung $A_{\varphi(\iota),\psi(\iota)}$ (i und k sind durch ein ganz allgemein algebraisches Gesetz miteinander verknüpft) ausgegangen. Speziell die Berechnung der letzteren würde nun ohne Einführung unserer Notation und Berücksichtigung des Dualitätsprinzipes bei elementarer Behandlung große Schwierigkeiten bereiten, wenn nicht die Anschauung zu Hilfe genommen wird.

Entsprechend der Definition $u > v$, $k = u\iota$, der vorausgegangenen Definition a+k, b+k = maximal n und der zwangsläufigen Koppelung von i und k folgt für die höchste Zahl p des Laufindex ι aus $a+up = n$,

$a = n(\mathrm{mod}\ u)$, $n(\mathrm{mod}\ u)+up = n$

$$p = \frac{n-n(\mathrm{mod}u)}{u}$$

Dieselbe Beziehung folgt aus $b+up = n$
Da weiters definiert wurde $i = v\iota$, $k = u\iota$, folgt für den allgemeineren Fall, daß der Laufindex $\iota = m+\nu d$, also selbst wieder eine Funktion von ν ist, d.h. für den allgemeineren Fall der diskontinuierlichen Form als Summe der Operationsmöglichkeiten:

$$N = 2^q \sum_{\iota=1}^{\iota=p} (n-v\iota)(n-u\iota), \qquad \text{und da } \iota = m+\nu d$$

$p = m+\nu_0 d$ (für die Höchstzahl des laufenden Index)

Weiters

$$N = 2^q \sum_{\nu=1}^{\nu=\nu_0} [n-v(m+\nu d)][n-u(m+\nu d)]$$

$$= 2^q \left\{ n^2\nu_0 - n(u+v)\left[m\nu_0 + d\sum_{\nu=1}^{\nu=\nu_0}\nu\right] + uv\left[m^2\nu_0 + 2md\sum_{\nu=1}^{\nu=\nu_0}\nu + d^2\sum_{\nu=1}^{\nu=\nu_0}\nu^2\right]\right\}$$

wo p wie oben $p = \frac{n-n(\mathrm{mod}u)}{u}$ und $\nu_0 = \frac{(p-m)-(p-m)\ \mathrm{mod}\ d}{d}$

Dieser Ausdruck gilt für sämtliche Sauteur und Coursier-Formen und ist allgemeiner gehalten als die entsprechenden Ausdrücke bei Dr. Fabel und M.Kuehl, da er auch für sämtliche diskontinuierliche Coursier-Formen gilt, deren Laufgesetz sich auf eine beliebige arithmetische Progression bringen lassen. Beim Einsetzen spezieller Werte lassen sich sehr einfach daraus die gesuchte Höchstzahl der Schlüsselzüge berechnen.

Für m = 0, d = 1 geht der Laufindex $\iota = m+\nu d$ ($\nu = 1,2,\ldots\ldots \nu_0$) über in

$\iota = \nu$ ($\nu = 1,2,\ldots\ldots \nu_0$), und stellt damit den Laufindex der kontinuierlichen Coursierform vor. Es wird dann

$\frac{p}{l} = \frac{p - p \bmod l}{l} = p$ und es folgt als Summe der Operationsmöglichkeiten für diese kontinuierliche Coursierform

$$N = 2^q \sum_{l=1}^{l=p} (n-vl)(n-ul) = 2^q \left[n^2 p - n(u+v) \sum_{l=1}^{l=p} l + uv \sum_{l=1}^{l=p} l^2 \right] \ldots\ldots\ldots I$$

wo $u > v$ und q die Anzahl der bestehenden Dualitäten (Freiheiten) bedeutet und dank der gewählten Notation sofort an den Besonderheiten der beiden Indices der jeweiligen speziellen A_{lk} direkt abgelesen werden kann ohne daß, wie bei den folgend besprochenen Formeln von Dr. Fabel und Martin Kuehl die Hilfe der Anschauung in Anspruch genommen werden muß.

Der angegebene Ausdruck I deckt sich anscheinend vollständig mit dem von Dr. Fabel in Sphinx (1933,4) veröffentlichten

$$C(x,y) = 8 \sum_{t=1}^{t \cdot F \frac{n-1}{x}} (n-tx)(n-qtx), \qquad x > y, \qquad y = qx$$

Es ist mir nicht bekannt, auf Grund welcher Überlegungen der genannte ~~Ausdruck~~ Autor zu diesem Ausdruck gelangt ist. Die Formel trägt jedenfalls nicht den geforderten ganz allgemeinen Charakter, da der Faktor 8 für eine große Anzahl von A_{lk} Operationen nicht stimmt und wie der Autor selbst erwähnt, für Figuren, die sich parallel zu den Seiten oder unter 45 Grad hiezu bewegen, die Hälfte des von der Formel gelieferten Wertes genommen werden muß, ganz abgesehen davon, daß Fälle nichtkommutativer und irreversibler Operationen keine Berücksichtigung gefunden haben und hier der Faktor andere Werte annimmt.

Auch die von Martin Kuehl angegebene Formel

$$C(x,y) = \frac{r}{6x^2} (n-p)\left[3nx(n-x+p) - y(n+x-p)(n-x+2p)\right]$$

$p = n \pmod x$, r = Anzahl der von einem Feld in Brettmitte theoretisch möglichen Zugrichtungen der betreffenden Figur, ist wie diese letztere Feststellung zeigt, zu sehr an die Anschauung gebunden und dringt nicht in den Kern der Sache ein, den hier herrschenden Dualitätsprinzip.

Wohl aber beachtet Ausdruck I die strukturellen Eigentümlichkeiten des Problems, indem er neben den für jede Operation kennzeichnenden Bewegungsgrößen u, v sowohl deren Ausdruck für die Anzahl der Freiheitsgrade (Dualitäten) enthält als auch in charakterisierenden Reihensummen des Laufindex aufgelöst erscheint, in die Reihensumme der ersten und zweiten Potenz des Lauf-Index, die je nach Eigenart der gewählten $A_{lk} = A_{\nu l, \mu l}$ - Operation existenzfähig sind, oder beide oder zum Teil verschieden.

Es ist jedem, der sich mit Untersuchungen vorliegender Art, vorzüglich unter Zuhilfenahme der Anschauung, intensiver beschäftigt hat, ohneweiters klar, welche fast magische Bedeutung diese Reihensummen am Schachbrett haben, sodaß sich hier ihre nähere Erörterung erübrigt. Hier sei nur soviel erwähnt, daß Schulz auf diesem Gebiet hübsche zahlentheoretische Zusammenhänge gezeigt hat.

Im folgendem wird nun versucht, eine kurze, keineswegs erschöpfende Systematik der Untergruppe dritten Grades der allgemeinen A_{lk} Operation, also der Operation

$$A_{\nu l, \mu l}$$

zu geben, mit anderen Worten, eine Klassifikation der Figuren nach strengeren Gesichtspunkten als bei Dawson vorzunehmen.

Gleichzeitig wird an Hand der allgemeinen Gleichung I und unter Zuhilfenahme der entwickelten Notation die jeweilig gesamte Zahl der Operationsmöglichkeiten N (die " Höchstzahl der Schlüsselzüge" Dr. Fabels) berechnet.

$$N = 2^q \sum_{\iota=1}^{\iota=p} (n-v\iota)(n-u\iota)$$

oder:

$$N = 2^q \left[n^2 p - n(u+v) \sum_{\iota=1}^{\iota=p} \iota + uv \sum_{\iota=1}^{\iota=p} \iota^2 \right] \text{ mit } u > v, \quad p = \frac{n-n(\text{mod } u)}{u}$$

q = Anzahl der Freiheitsgrade, abzulesen an der jeweiligen $A_{\iota\kappa}$ Operation.

Je nach dem vorliegenden besonderen Fall ist es bequemer, vom ersten oder zweiten Ausdruck auszugehen.

Die Operation $A_{\iota\kappa}$ mit $i = v\iota$, $k = u\iota$

I. Einfache, kommutative Operationen (unter anderem reversible Formen, das sind solche mit doppelter Zeichenzuordnung.)

1. Der Laufindex beschränkt sich auf $\iota = 1$ Es wird $i = v$, $k = u$, geschrieben A_{vu} (Springer-Typ, "Sauteurs" laut Dawson) Wegen $u \neq v$ bleiben alle drei Dualitäten bestehen, also $q = 3$.

$N = 8(n-v)(n-u)$

a) bei $v=1$, $u=2$, geschrieben A_{12} (orthodoxer Springer)
$N = 8(n-1)(n-2)$

2. Der Laufindex nimmt sämtliche Werte zwischen 1 und p an, $\iota = 1,2,\ldots,p$, geschrieben $A_{v\iota,u\iota}$ (Langschrittler, "Coursiers" laut Dawson)

Hier sind unter anderem folgende spezielle Fälle möglich:

α) $v = \pm 1$, $u = \pm 1$ Es wird $i = \pm\iota$, $k = \pm\iota$, geschrieben $A_{\iota\iota}$ (orthodoxer Läufer).

Wegen der Identität $\iota = \iota$ entfällt Dualität I, also $q = 2$; $p = \frac{n-n(\text{mod } 1)}{1} = n$

$$N = 2^2 \left[n^3 - 2n(1+2+\ldots+n) + 1.\frac{1}{6}(2n+1)(n+1)n \right] = 2/3n(2n-1)(n-1)$$

β) $v=0$, $u = \pm 1$ Es wird $i = 0$, $k = \pm\iota$ geschrieben $A_{o\iota}$ (orthodoxer Turm).

Wegen Nullwerden eines Index entfällt Dualität II, also $q = 2$, $p = n$

$$N = 2^2 \left[n^3 - n(1+2+\ldots+n) + 0.\Sigma\iota^2 \right] = 2n^2(n-1)$$

c) $v = \pm 1, \quad u = \pm 2$ Es wird $i = \pm l, \quad k = \pm 2l$, geschrieben $A_{l,2l}$, Nachtreiter,

Wegen $l \neq 2l$ bleibt Dualität I und wegen zurechtbestehen beider Zeichen bei beiden Laufindices bleiben die beiden anderen Dualitäten erhalten.

$p = \frac{n-n(\mathrm{mod}.2)}{2}$, d.h. für α) n gerade $p = \frac{n}{2}$

β) n ungerade $p = \frac{n-1}{2}$

α) n gerade,

$$N = 8\left\{\frac{n^2}{2} - 3n.\frac{1}{2}.\left(1 + \frac{n+2}{2}\right).\frac{n}{2} + 2.\frac{1}{6}(n+1).\frac{n+2}{2}.\frac{n}{2}\right\} = \frac{1}{3}n(n-2)(5n-2)$$

β) n ungerade

$$N = 8\left\{\frac{n^2(n-1)}{2} - 3n.\frac{1}{2}\left(1+\frac{n-1}{2}\right)\frac{n-1}{2} + 2.\frac{1}{6}.n\left(\frac{n-1}{2}+1\right).\frac{n-1}{2}\right\} = \frac{1}{3}n(n-1)(5n-7)$$

d) $v = \pm v, \quad u = \pm u, \quad v,u \neq 0, \quad v \neq u$

Es wird $i = \pm vl, \quad k = \pm ul$, geschrieben $A_{vl,\,ul}$, allgemeiner Coursier), d.h. es bleiben alle drei Dualitäten erhalten, $q = 3$

$$N = 8\left\{(n-v)(n-u)+(n-2v)(n-2u) + \ldots.(n-pv)(n-pu)\right\} = \frac{4}{3}.p\left\{6n^2 - (p+1)\left[3(u+v).n - uv(2p+1)\right]\right\}$$

$$p = \frac{n-n(\mathrm{mod}\ u)}{u}$$

II. Zusammengesetzte kommutative Operationen.

Unter anderem reversible Formen, das sind solche mit doppelter Zeichenzuordnung.

1. Der Laufindex beschränkt sich wie unter I,1 auf $l = 1$

a) Erste Teiloperation $v = 0, \quad u = \pm 1$
zweite Teiloperation $v = \pm 1, \quad u = \pm 1$, geschrieben

$A_{01,11}$ (König)

Bei der 1.Operation entfällt Dualität II wegen Nullwerden eines Index, also $q = 2$
Bei der 2.Teiloperation entfällt Dualität I wegen Identität $1 = 1$, $q = 2$

$$N = 2^2n(n-1)+2^2(n-1)^2 = 4(2n-1)(n-1)$$

2)) Der Laufindex l nimmt wie unter I,2 sämtliche Werte zwischen 1 und p an: $l = 1,2,\ldots\ldots.p$

a) Erste Teiloperation $v = 0, \quad u = \pm 1$,
zweite Teiloperation $v = \pm 1, \quad u = \pm 1$, geschrieben $A_{0l,\,1l}$ (Dame) Wir haben der Operation $A_{01,11}$ (König) isomorphe Verhältnisse:
Es entfällt bei der 1.Operation Dualität II, bei der 2.Operation Dualität I, $q = 2$.

$$A_{0l,} = A_{0l} + A_{ll} = 2n^2(n-1) + \frac{2}{3}(2n-1)(n-1)n = \frac{2}{3}n(5n-1)(n-1)$$

b) Erste Teiloperation $v = 0, \pm u = -1$,
zweite Teiloperation $v = \pm 1$, $u = +1$ geschrieben:

$A_{\underline{\quad\quad}}$, (zweiter Schulz'scher Einbahner, Falke)
$0-\ ,\ +$

die Anzahl der verbleibenden Dualitäten bei den einzelnen Teiloperationen ist analog a), ebenso N

Zum Schluß soll versucht werden, bei einer beliebig aufgestellten Operation , von der bewußt vermieden wird, anschauungsmäßig zu untersuchen, welcher Figur sie entspricht, beziehungsweise welchem Bewegungsgesetz sie am Brette gehorcht, das N zu berechnen, um den Grad der hier gemachten Abstraktion und die gegenständliche Unabhängigkeit des entwickelten Verfahrens von der Anschauung unter Beweis zu stellen.

Die Operation sei: $A_{+\ell-\ell,\ \underline{\quad\quad}}$
$\pm\ell\ \pm(\ell+1),\ 0+1$

Erste Teiloperation $A_{+\ell-\ell}$ Es entfällt Dualität II und III, Dualität I bleibt wegen Nichtidentität von $+\ell$ und $-\ell$ bestehen;
$q = 1$, $u = v = 1$
$p = \frac{n-n \pmod 1}{1} = n$

$$N_1 = 2\Big[n^3 - n.2.\sum_{\ell=1}^{\ell=n}\ell + 1.\sum_{\ell=1}^{\ell=n}\ell\Big] = \frac{1}{3}n(2n-1)(n-1)$$

Zweite Teiloperation $A_{\underline{\quad\quad}}$ Es entfällt Dualität I und III,
$\pm\ell\ \pm(\ell+1)$ (da laut Notation nur Gleichsinnigkeit der Vorzeichen zulässig ist, also bei + nur $+(\ell+1)$, bei $-\ell$ nur $-(\ell+1)$, $q = 1$

Da $\psi(\ell) = \ell+1$ und laut Forderung Seite (3) $\psi(p) < n$, muß $p = n-2$ werden.

$$N_2 = 2\Big[\sum_{\ell=1}^{\ell=n-3}(n-\ell)(n-\ell-1) = 2\Big[(n-1)(n-2)+(n-2)(n-3)+\ldots 2.1\Big] =$$
$$= \frac{2}{2}\,n(n-1)(n-2)$$

Dritte Teiloperation $A_{\underline{\quad}}$ Es entfallen alle drei Dualitäten. $q=0$, $\ell=1$,
$0+1$

$$N_3 = 2^0(n-0)(n-1) = n(n-1)$$

Somit $N = N_1+N_2+N_3 = \frac{2}{3}.n(n-1)(2n-1)$, eine Höchstzahl der Schlüsselzüge, die der des orthodoxen Läufers gleich ist.

Und nun eine anschauungsmäßige Untersuchung auf dem Brett. Sie lehrt uns, daß es sich um eine Figur handelt, die die Schrägen von links oben nach rechts unten und umgekehrt läuferartig, ferner die beiden, dem Standfeld ungleichfarbigen Schrägen nach rechts oben und links unten mit Ausnahme der unmittelbar oberhalb und unterhalb des Standfeldes befindlichen beiden ungleichfarbigen Felder ebenfalls läuferartig, aber nur in dem angeführten Richtungssinne beherrscht, und die außerdem wie ein Bauer jeweils um ein Feld nach aufwärts ziehen kann.

III. Nichtkommutative Operationen.

Unter anderem irreversible Formen, das sind solche mit beschränkter Vorzeichenzuordnung.
Unter den zusammengesetzten Operationen finden wir:

1. Der Laufindex beschränkt sich wie unterI,1 auf $\iota = 1$
a) Erste Teiloperation $v = 0, \pm u = +1$,
zweite Teiloperation $v = \mp 1$, $u = +1$,
geschrieben $A_{\overline{0+1,1+1}}$ (Bauer)

Bei $A_{\overline{0+1}}$ entfällt Dualität I wegen Nichtkommutativität, II wegen beschränkter Vorzeichenzuordnung, III wegen nicht Zutreffens von Gleichsinnigkeit und Ungleichsinnigkeit der Zuordnung, also $q = 0$ und

bei $A_{\overline{1+1}}$ entfällt I wegen Nichtkommutativität, II wegen beschränkter Vorzeichenzuordnung, hingegen bleibt III erhalten, also $q = 1$, daher:

$N = 2^0(n-0)(n-1) + 2^1(n-1)^2 = (n-1)(3n-2)$, welche Formel allerdings nur für einen Bauern gilt, der auch von der 1. ~~Lin~~ Reihe ziehen kann. Für die Verhältnisse des orthodoxen Schachs, bei dem der Bauer auf der 2.Zeile sein Standfeld hat, muß die Formel auf $N = (n-1)(3n-4)$ abgeändert werden.

2. Der Laufindex nimmt wie unter I,2 sämtliche Werte zwischen 1 und p ein, $\iota = 1,2,\ldots..p$

a) Erste Teiloperation $v = 0, \pm u = +1$,
zweite Teiloperation $v = \mp 1$, $u = -1$, geschrieben:

$A_{\overline{0+\iota,\iota-\iota}}$ (erster Schulz'scher Einbahner, Jäger)

Wir haben der Operation $A_{\overline{0+1,1+1}}$, (Bauer) isomorphe Verhältnisse

Bei $A_{\overline{0+\iota}}$ entfallen sämtliche drei Dualitäten
Dualität I wegen Nichtkommutativität, abzulesen an: $A_{\overline{0+\iota}}$
Dualität II, da nur e i n Zeichen (Kennzeichen irreversibler Bewegung) zu~~lässig~~ ist.
Dualität III, da wegen Nullwerden eines Index die Gleichsinnigkeit, beziehungsweise die Ungleichsinnigkeit der Zuordnung entfällt, also $q = 0$

Bei $A_{\overline{\iota-\iota}}$ entfallen 2 Dualitäten:
Dualität I wegen Identität $\iota = \iota$
Dualität II da nicht sowohl bei ι als auch bei $-\iota$ verschiedene Vorzeichen zu~~lässig~~ sind.
(Kennzeichen der irreversiblen Bewegung, da bei ι beide, bei $-\iota$ nur das vorgesetzte Zeichen laut Notation zu~~lässig~~ sen ist), also $q = 1$

$N = 2^0 \sum_{\iota=1}^{\iota=n} n(n-\iota) + 2^1 \sum_{\iota=1}^{\iota=n} (n-\iota)^2 = \frac{1}{6}.n(n-1)(7n-2)$